

Варіант 1

1. (1 б) Встановіть, яка з функцій $F_1(x) = \cos x$; $F_2(x) = -\cos x$; $F_3(x) = \sin x$; $F_4(x) = -\sin x$ є однією з первісних функції $f(x) = -\cos x$ на проміжку $x \in (-\infty; +\infty)$

Відповідь: $F_4(x) = -\sin x$

2. (2 б) Вкажіть одну з первісних функцій:

1) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

2) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x} - \frac{1}{x^5}$

Розв'язок:

**Відповідь учнів може відрізнятися на будь-яку константу*

1) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

$$F(x) = \frac{4}{5} x \sqrt[4]{x}$$

2) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x} - \frac{1}{x^5}$

**Так як $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$, то:*

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\operatorname{ctg} 2x) - \left(-\frac{1}{4 \cdot x^4}\right) = -\frac{\operatorname{ctg} 2x}{2} + \frac{1}{4x^4}$$

3. (3 б) Знайдіть загальний вигляд первісної для функції $f(x)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$

4) $f(x) = (3 + 4x)^5$

Розв'язок:

1) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

$$F(x) = -\frac{1}{2x^2} + C$$

2) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

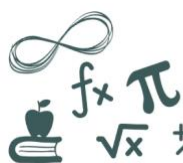
$$F(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \operatorname{tg} x + C$$

3) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$

$$F(x) = -\operatorname{ctg} x + C$$

4) $f(x) = (3 + 4x)^5$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(3 + 4x)^6}{6} + C \\ &= \frac{(3 + 4x)^6}{24} + C \end{aligned}$$



4. (3 б) Для функції $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ знайдіть первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку $\left(\frac{\pi}{4}; 5\right)$

Розв'язок:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = -\operatorname{ctg} x + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення C :

$$5 = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + C$$

$$5 = -1 + C$$

$$C = 6$$

$$\text{Відповідь: } F(x) = -\operatorname{ctg} x + 6$$

5. (3 б) $F(x)$ – первісна функції $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$. Знайдіть $F(4)$.

Розв'язок:

Знайдемо загальний вигляд первісної:

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення C :

$$7 = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)} + C$$

$$7 = -1 \cdot (-2) + C$$

$$C = 5$$

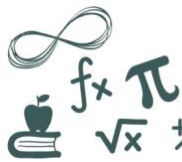
Запишемо первісну функцію дану за умовою:

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 5$$

Знайдемо $F(4)$ для первісної, заданої в умові:

$$F(4) = -\frac{1}{4} + 5 = \frac{-1 + 20}{4} = \frac{19}{4} = 4,75$$

Відповідь: 4,75



Варіант 2

1. (1 б) Встановіть, яка з функцій $F_1(x) = \cos x$; $F_2(x) = -\cos x$; $F_3(x) = \sin x$; $F_4(x) = -\sin x$ є однією з первісних функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $x \in (-\infty; +\infty)$

Відповідь: $F_2(x) = -\cos x$

2. (2 б) Вкажіть одну з первісних функцій:

1) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 5x} - \frac{1}{x^4}$

Розв'язок:

**Відповідь учнів може відрізнятися на будь-яку константу*

1) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

$$F(x) = \frac{5}{6} x^{\frac{5}{5}+1} = \frac{5}{6} x^{\frac{6}{5}}$$

2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 5x} - \frac{1}{x^4}$

**Так як $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$, то:*

$$F(x) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg} 5x - \left(-\frac{1}{3x^3}\right) = \frac{\operatorname{tg} 5x}{5} + \frac{1}{3x^3}$$

3. (3 б) Знайдіть загальний вигляд первісної для функції $f(x)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

2) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - x^{-8}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

4) $f(x) = (2 - 7x)^3$

Розв'язок:

1) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$F(x) = \operatorname{tg} x + C$$

2) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - x^{-8}$

$$F(x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{x^{-7}}{-7} + C$$

$$= -\operatorname{ctg} x + \frac{x^{-7}}{7} + C$$

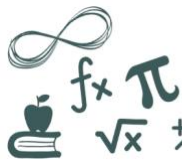
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$F(x) = 2\sqrt{x} + C$$

4) $f(x) = (2 - 7x)^3$

$$F(x) = -\frac{1}{7} \cdot \frac{(2 - 7x)^4}{4} + C$$

$$= -\frac{(2 - 7x)^4}{28} + C$$



4. (3 б) Для функції $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ знайдіть первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку $\left(\frac{\pi}{4}; 6\right)$

Розв'язок:

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = \operatorname{tg} x + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення C :

$$6 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + C$$

$$6 = 1 + C$$

$$C = 5$$

Відповідь: $F(x) = \operatorname{tg} x + 5$

5. (3 б) $F(x)$ – первісна функції $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 6$. Знайдіть $F(1)$.

Розв'язок:

Знайдемо загальний вигляд первісної:

$$F(x) = -\frac{1}{2x^2} + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення C :

$$6 = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2} + C$$

$$6 = -1 \cdot 2 + C$$

$$C = 8$$

Запишемо первісну функцію дану за умовою:

$$F(x) = -\frac{1}{2x^2} + 8$$

Знайдемо $F(1)$ для первісної, заданої в умові:

$$F(1) = -\frac{1}{2 \cdot 1^2} + 8 = \frac{-1 + 16}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$$

Відповідь: 7,5